Komplexe Zahlen

FRANZ PAUER (UNIVERSITÄT INNSBRUCK)

Das Thema Komplexe Zahlen regt an, über den Zahlbegriff und seine Entwicklung im Lauf der Schulzeit nachzudenken. Komplexe Zahlen haben wichtige Anwendungen in der Physik und der Elektrotechnik. Innerhalb der Mathematik werden sie verwendet, um gewisse Aufgaben, die mit reellen Zahlen formuliert wurden, einfacher lösen zu können. Es gibt auch interessante Querverbindungen zur Geometrie der Ebene, zum Beispiel kann die Multiplikation mit einer komplexen Zahl als Drehstreckung interpretiert werden. In diesem Beitrag werden komplexe Zahlen als Paare reeller Zahlen mit komponentenweiser Addition und einer geeigneten Multiplikation eingeführt. Diese Rechenoperationen werden geometrisch interpretiert. Dann werden Anwendungen in der Algebra und der Elektrotechnik vorgestellt und schließlich andere Möglichkeiten, die komplexen Zahlen einzuführen, angegeben.

1. Einleitung

Gibt es eine Zahl, deren Quadrat -1 ist?
Schülerinnen und Schüler, die im Unterricht gut aufgepasst haben, werden mit nein antworten, weil unter einer Wurzel ja keine negative Zahl stehen darf. Wenn sie dann in der 10. oder 11. Schulstufe von der „imaginären Einheit i“ und von „komplexen Zahlen“ hören, werden manche argumentieren, dass schon die Worte *imaginär* und *komplex* darauf hinweisen, dass das alles nicht real, sondern *ein Schwindel* ist und falls die komplexen Zahlen doch existieren, der Umgang mit ihnen *sehr schwierig* ist.

Im Lehrplan der AHS (BMBWF ahs (2021)) für die 11. Schulstufe wird verlangt, dass Schülerinnen und Schüler komplexe Zahlen kennen, mit ihnen rechnen und sie zum Lösen von Gleichungen verwenden können. Weiters sollen sie den Fundamentalsatz der Algebra und - leider nur optional - komplexe Zahlen in Polarform kennen. In Fachrichtungen der HTL wie Elektrotechnik, Mechatronik, Elektronik und Technische Informatik werden komplexe Zahlen bereits im 2. Jahrgang unterrichtet, weil sie für den Fachunterricht in Elektrotechnik gebraucht werden. Der Lehrplan (BMBWF htl (2021)) schreibt zusätzlich zu den Themen im Lehrplan der AHS verpflichtend vor, dass die Polarform und die Exponentialform von komplexen Zahlen unterrichtet werden, damit diese zur Behandlung elektrischer Netzwerke angewandt werden können.

In diesem Beitrag behandeln wir die folgenden Themen:

- Um die eingangs gestellte Frage beantworten zu können, muss zuerst überlegt werden, was man mit „Zahl“ und „Zahlbereich“ meint. Damit befassen wir uns im zweiten Abschnitt.
- Im dritten Abschnitt wird ein einfacher Zugang zum Zahlbereich der komplexen Zahlen angegeben: komplexe Zahlen sind Paare von reellen Zahlen, sie werden komponentenweise addiert und nicht komponentenweise, sondern so multipliziert, dass $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$ ist.
- Komplexe Zahlen können - nach Wahl eines Koordinatensystems - geometrisch als Punkte der Zeichenebene interpretiert werden. Den Rechenoperationen Addition und Multiplikation entsprechen dann eine „Parallelogrammkonstruktion“ und eine „Drehstreckung“. Das wird im vierten Abschnitt dargestellt, Grundlage für die geometrische Interpretation der Multiplikation sind die Polarkoordinaten von komplexen Zahlen beziehungsweise deren Exponentialform.
- Im fünften Abschnitt geht es um Einheitswurzeln, quadratische Gleichungen und Polynome mit komplexen Koeffizienten. Letztere sind in mancher Hinsicht einfacher als Polynome mit reellen Koeffizienten, weil sie immer in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegt werden können. Das folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra. Damit wird es in manchen Fällen möglich, Aussagen über Polynome mit reellen Koeffizienten durch einen „Umweg über komplexe Koeffizienten“ besser zu verstehen und einfacher zu beweisen.

Ich danke Manfred Borovcnik für das sorgfältige Lesen des Manuskripts und für viele Beiträge zur Verbesserung dieses Textes.

- Im sechsten Abschnitt wird exemplarisch eine Anwendung der komplexen Zahlen in der Elektrotechnik vorgestellt und die der Anwendung zugrunde liegende mathematische Idee erläutert.
- Im vorletzten Abschnitt werden andere Möglichkeiten vorgestellt, komplexe Zahlen einzuführen: als Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich 1, als gewisse reelle 2×2-Matrizen oder als Drehstreckungen (um den Nullpunkt) in der Ebene.
- Abschließend werden ein paar Gründe angegeben, warum es sinnvoll sein kann, komplexe Zahlen auch im Unterricht an der AHS zu besprechen.

2. Was sind Zahlen?

Was unter „Zahl" verstanden wird, hat sich im Lauf der Geschichte verändert und ändert sich auch für jede Schülerin und jeden Schüler im Lauf der Schulzeit.

2.1. Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ sind die ersten Zahlen, die man kennenlernt. Mit ihnen sind die zwei Rechenoperationen Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$ eng verbunden.

Diese zwei Rechenoperationen erfüllen die folgenden grundlegenden Rechenregeln:

Für alle natürlichen Zahlen a, b, c ist

- $(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
  (Assoziativgesetze: beim mehrfachen Addieren oder Multiplizieren kommt es auf die Reihenfolge der Additionen oder Multiplikationen nicht an, daher können Klammern weggelassen werden),
- $a+b = b+a, \quad a \cdot b = b \cdot a$,
  (Kommutativgesetze: beim Addieren oder Multiplizieren kommt es auf die Reihenfolge der Summanden oder Faktoren nicht an),
- $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b+c)$,
  (Distributivgesetz: die Rechenoperationen Addition und Multiplikation sind „verträglich", man kann herausheben und ausmultiplizieren),
- $a+0 = a, \quad a \cdot 1 = a$,
  (Addition von 0 und Multiplikation mit 1 verändern eine Zahl nicht).

2.2. Zahlbereiche

Der *Zahlbereich der natürlichen Zahlen* besteht aus der Zahlenmenge $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und den zwei Rechenoperationen Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$.

Ein *Zahlbereich* besteht aus einer Menge, genannt *Zahlenmenge*, welche die Menge der natürlichen Zahlen (oder eine Teilmenge, die mit dieser identifiziert wird) enthält, und aus zwei Rechenoperationen, genannt *Addition* $(+)$ und *Multiplikation* $(\cdot)$.

Die zwei Rechenoperationen erfüllen die grundlegenden Rechenregeln des Zahlbereichs der natürlichen Zahlen (siehe 2.1) und ihre Einschränkungen auf die natürlichen Zahlen stimmen mit den entsprechenden Rechenoperationen für natürliche Zahlen überein.

Die Elemente der Zahlenmenge eines Zahlbereichs nennt man *Zahlen*.

2.3. Zahlbereichserweiterungen

Ein Zahlbereich mit Zahlenmenge E ist eine *Erweiterung* eines Zahlbereichs mit Zahlenmenge D, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- D ist eine Teilmenge von E oder kann als solche aufgefasst werden,

- die Einschränkungen der Rechenoperationen von E auf D stimmen mit jenen von D überein,
- alle Rechenregeln für die Rechenoperationen auf D gelten auch für die Rechenoperationen auf E.

Warum will man einen Zahlbereich erweitern? Oft ist ein Problem in einem bekannten Zahlbereich nicht lösbar, aber man möchte, dass es in einem größeren Zahlbereich lösbar ist. Das heißt: der bisherige Zahlbegriff war zu eng gefasst, man möchte ihn erweitern.

Im Schulunterricht werden mehrere Zahlbereichserweiterungen besprochen:

- Von den natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0}$ (4., 5. und 6. Schulstufe)
  Aufgaben wie „Finde eine Zahl x so, dass $3 \cdot x = 2$ ist!“ sind in $\mathbb{N}$ nicht lösbar, daher ist diese Erweiterung notwendig.
- Von den positiven rationalen Zahlen zu den rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{Q}$ (7. Schulstufe)
  Dann kann man Aufgaben wie „Finde eine Zahl x so, dass $x+3=1$ ist!“ lösen.
- Von den rationalen Zahlen zu gewissen algebraischen Erweiterungen der rationalen Zahlen („Rechnen mit Wurzeln“) : zum Beispiel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (8. und 9. Schulstufe)
  Diese Erweiterungen werden durch Aufgaben wie „Finde eine Zahl x so, dass $x^2 = 2$ ist!“ motiviert.
- Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (10. Schulstufe)
  Diese Erweiterung ist nötig, damit zum Beispiel die Folge $(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl konvergiert.
- Von den reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ (10. oder 11. Schulstufe)
  Nach dieser Erweiterung kann man Aufgaben wie „Finde eine Zahl x so, dass $x^2 = -1$ ist!“ lösen.

2.4. Konstruktion von Zahlbereichserweiterungen

Um einen Zahlbereich zu erweitern, geht man wie folgt vor:
Zuerst wird die „neue Zahlenmenge“ angegeben, also vereinbart, was die „neuen Zahlen“ sind.
Man wählt sie so, dass
- die alte Zahlenmenge in der neuen enthalten ist oder mit einer Teilmenge der neuen identifiziert werden kann,
- die neue Zahlenmenge ein Element enthält, das als Lösung des motivierenden Problems in Frage kommt und
- die neue Zahlenmenge „möglichst klein“ ist.

Dann werden die Rechenoperationen Addition und Multiplikation auf der neuen Zahlenmenge so definiert, dass
- sie auf der alten Zahlenmenge gleich bleiben,
- sie die Lösung des motivierenden Problems ermöglichen, und
- die Rechenregeln der Rechenoperationen auf der alten Zahlenmenge auch für jene auf der neuen Zahlenmenge gelten („Permanenzprinzip“).

Die „neuen“ Zahlen müssen aus schon bekannten Objekten konstruiert werden. Es genügt nicht, sie als Elemente einzuführen, welche die geforderte Eigenschaften haben. Wer zum Beispiel schreibt „i sei eine Zahl, deren Quadrat -1 ist“, lässt die Frage unbeantwortet, ob es eine solche Zahl überhaupt gibt.

3. Grundlegendes über komplexe Zahlen

3.1. Definition der komplexen Zahlen - einfacher Zugang

Eine komplexe Zahl wird als Paar von reellen Zahlen definiert. Die Zahlenmenge $\mathbb{C}$ aller komplexen Zahlen ist dann die Menge $\mathbb{R}^2$ aller Paare von reellen Zahlen.

Das Paar $(a,0)$ fassen wir als reelle Zahl a auf. So betrachten wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Die Summe von zwei komplexen Zahlen definieren wir als die komponentenweise Summe

$$(a,b)+(c,d) := (a+c,b+d).$$

Das Produkt von zwei komplexen Zahlen wird anders als das komponentenweise Produkt definiert und zwar so:

$$(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c-b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c).$$

Dann gilt insbesondere

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

und das Produkt einer reellen Zahl $a=(a,0)$ mit einer komplexen Zahl (c,d) ist

$$a\cdot(c,d) = (a,0)\cdot(c,d) = (a\cdot c, a\cdot d).$$

Man prüft leicht nach, dass alle Rechenregeln für reelle Zahlen auch für komplexe Zahlen gelten. Insbesondere werden komplexe Zahlen durch die Addition von $0=(0,0)$ und die Multiplikation mit $1=(1,0)$ nicht verändert.

Wir schreiben kurz 1 für $(1,0)$ und i (oder j) für $(0,1)$. Dann ist

$$(a,b) = a\cdot(1,0)+b\cdot(0,1) = a\cdot 1+b\cdot i =: a+bi$$

und mit dieser Schreibweise ist

$$(a+bi)+(c+di) = (a,b)+(c,d) = (a+c,b+d) = (a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c-b\cdot d, a\cdot d+b\cdot d) = (a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)i.$$

Die Definition der Addition von Zahlenpaaren ist naheliegend und Schülerinnen und Schülern der 10. Schulstufe schon bekannt. Warum haben wir aber die Multiplikation wie oben definiert?

Dieses Produkt wurde so definiert, weil man möchte, dass $i\cdot i=-1$ ist, $a\cdot(c+di) = a\cdot c+(a\cdot d)i$ ist und dass alle Rechenregeln der reellen Zahlen gelten. Dann muss

$$(a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot c+(a\cdot d)i+(b\cdot c)i+(b\cdot d)\cdot\underbrace{i^2}_{-1} =$$

$$= (a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)i$$

sein.

Die erste bzw. zweite Komponente von $(a,b)=a+bi$ heißt *Realteil* bzw. *Imaginärteil* der komplexen Zahl (a,b). Wir verwenden die Schreibweise $\mathrm{Re}(a+bi) := a$ und $\mathrm{Im}(a+bi) := b$.

Die Bezeichnung „Imaginärteil“ darf nicht missverstanden werden. Der Imaginärteil einer komplexen Zahl ist ebenso eine reelle Zahl wie der Realteil. Vielleicht sollte im Schulunterricht diese Bezeichnung vermieden werden, um nicht die Vorstellung zu fördern, dass komplexe Zahlen, die nicht reell sind, etwas „imaginäres“, das es „eigentlich nicht gibt“, seien.

3.2. Dividieren von komplexen Zahlen

Reelle Zahlen können durch alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen dividiert werden. Gilt das analog für komplexe Zahlen?

Sei $a+bi=(a,b)\neq(0,0)$ eine komplexe Zahl.

Wir suchen zunächst eine komplexe Zahl (x,y) so, dass $(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)=1$ ist. Eine solche heißt *zu (a,b) inverse Zahl*. Wir schreiben dafür

$$(a,b)^{-1} \text{ oder } (a+ib)^{-1}.$$

Gibt es eine solche Zahl? Gibt es genau eine? Wir suchen reelle Zahlen x und y so, dass

$$(a,b)\cdot(x,y)=(ax-by,bx+ay)=(1,0)$$

ist. Das Zahlenpaar (x,y) ist somit eine Lösung des Systems von 2 linearen Gleichungen

$$ax-by=1, \quad bx+ay=0$$

mit den zwei Unbekannten x und y.

Mit Gauß-Elimination (siehe zum Beispiel Pauer (2018), S. 300-303) oder mit der Cramer'schen Regel (siehe zum Beispiel Artin (1993), S. 31) erhalten wir wegen $(a,b)\neq(0,0)$ genau eine Lösung, nämlich

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Daher ist

$$(a+bi)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\frac{1}{a^2+b^2}(a-bi)$$

die zu $a+bi$ inverse Zahl. Insbesondere hat jede von $0=0+0i$ verschiedene komplexe Zahl eine dazu inverse Zahl.

Durch $a+bi\neq 0$ *dividieren* heißt, mit der dazu inversen Zahl $(a+bi)^{-1}$ zu multiplizieren. Man verwendet dieselben Divisionszeichen (— oder / oder :) wie für reelle Zahlen. Es ist

$$\frac{c+di}{a+bi}=(c+di)/(a+bi)=(c+di):(a+bi)=(c+di)\cdot(a+bi)^{-1}.$$

Beispiel:

$$\frac{2+3i}{1-i}=(2+3i)\cdot(1-i)^{-1}=(2+3i)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i.$$

Die Zahl $(a,-b)=a-bi$ heißt die zu $(a,b)=a+bi$ *konjugierte komplexe Zahl*. Es ist üblich, die konjugierte komplexe Zahl einer komplexen Zahl z kurz mit $\bar{z}$ zu bezeichnen.

Wenn z eine reelle Zahl ist, dann ist $z=\bar{z}$.
Man rechnet leicht nach, dass für zwei komplexe Zahlen w und z gilt:

$$\overline{w\cdot z}=\bar{w}\cdot\bar{z},\ \overline{w+z}=\bar{w}+\bar{z} \text{ und } z\cdot\bar{z}=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2.$$

Die reelle Zahl $|z|:=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$ heißt der *Betrag* von z.

Wegen $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ ist

$$z^{-1}=\frac{1}{|z|^2}\cdot\bar{z}.$$

3.3. Exkurs: Können komplexe Zahlen wie reelle Zahlen geordnet werden?

Die (strenge totale) Ordnung $<$ der reellen Zahlen ist mit Addition und Multiplikation verträglich, dh. für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

- aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ und
- aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $c \cdot a < c \cdot b$.

Für komplexe Zahlen gibt es keine solche Ordnung, denn:

Wäre $<$ eine solche Ordnung und $0 < i$, dann wäre

$$0 = i \cdot 0 < i \cdot i = -1.$$

Daraus würde

$$1 = 0 + 1 < -1 + 1 = 0$$

folgen. Damit wäre die Ordnung jedenfalls anders als die von reellen Zahlen, aber es kommt noch schlimmer: wegen

$$i = i \cdot 1 < i \cdot 0 = 0$$

ergäbe sich ein Widerspruch.

Wäre $<$ eine solche Ordnung und $0 > i$, dann wäre

$$-i = -i + 0 > -i + i = 0$$

und somit

$$-1 = (-i) \cdot (-i) > (-i) \cdot 0 = 0.$$

Daraus würde

$$i = (-i) \cdot (-1) > (-i) \cdot 0 = 0$$

folgen, im Widerspruch zur Annahme $0 > i$.

Es gibt viele Ordnungen auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, zum Beispiel die lexikographische Ordnung

$$a + bi <_{lex} c + di \text{ genau dann, wenn } [(a < c) \text{ oder } (a = c \text{ und } b < d)].$$

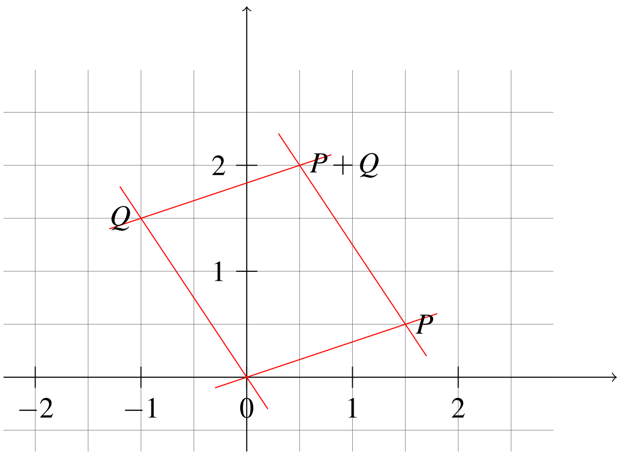
Diese ist aber nicht mit der Multiplikation verträglich. Zum Beispiel ist $0 <_{lex} 1 - i$ und $i <_{lex} 1$, aber $(1 - i) \cdot i >_{lex} (1 - i) \cdot 1$.

4. Geometrische Interpretation der Rechenoperationen

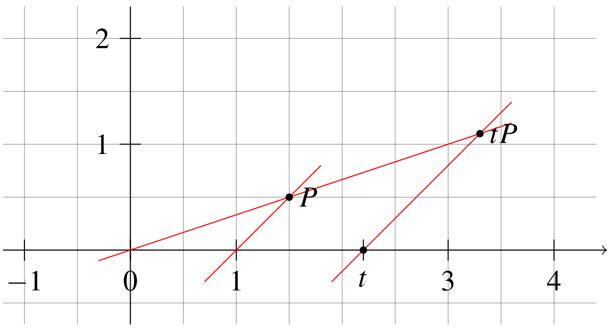
4.1. Geometrische Interpretation der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen

Ein Koordinatensystem in der (Zeichen-)Ebene wird durch die Wahl von zwei Zahlengeraden gegeben, die einander nur in ihren Nullpunkten schneiden. Nach Wahl eines Koordinatensystems in der Ebene wird diese zum $\mathbb{R}^2$, das heißt: Paare reeller Zahlen können als Koordinatenpaare von Punkten der Ebene betrachtet werden. Wir machen daher im Weiteren keinen Unterschied zwischen einem Punkt und seinem Koordinatenpaar (bezüglich des gewählten Koordinatensystems).

Der komponentenweisen Addition von Zahlenpaaren P und Q entspricht die Konstruktion des Parallelogramms mit den Eckpunkten $0, P, Q$ und $P + Q$.



Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl erfolgt komponentenweise. Der komponentenweisen Multiplikation eines Zahlenpaares P mit einer reellen Zahl t entspricht die folgende Konstruktion: Die Gerade durch $(1,0)$ und P wird in den Punkt $(t,0)$ verschoben. Der Punkt $t \cdot P$ ist dann der Schnittpunkt der verschobenen Geraden mit der Geraden durch $(0,0)$ und P.



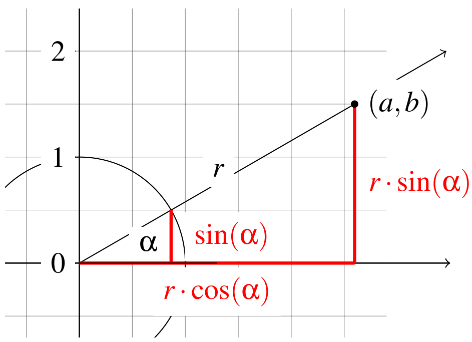
4.2. Polarkoordinaten der Ebene

Sei $a+bi = (a,b) \neq (0,0)$ eine komplexe Zahl bzw. ein Punkt der Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem, das ist ein Koordinatensystem, in dem die Koordinatenachsen zueinander normal stehen. Der Abstand von (a,b) zu $(0,0)$ ist gleich dem Betrag von $a+bi$:

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} =: r.$$

Mit $\alpha \in [0,2\pi[$ bezeichnen wir den Winkel von der positiven ersten Koordinatenachse zur Halbgeraden von $(0,0)$ durch (a,b) und mit r den Abstand von (a,b) zu $(0,0)$. Man nennt das Paar (r,α) die *Polarkoordinaten* des Punktes mit kartesischen Koordinaten (a,b).

Dann ist $a = r\cdot\cos(\alpha)$ und $b = r\cdot\sin(\alpha)$.



Es ist

$$a+ib = (a,b) = (r\cdot\cos(\alpha), r\cdot\sin(\alpha)) = r\cdot(\cos(\alpha)+\sin(\alpha)i) =: re^{\alpha i}.$$

Die Schreibweise $re^{\alpha i}$ nennt man *Exponentialform* der komplexen Zahl $a+bi$. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass diese Darstellung von komplexen Zahlen eine gute Interpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen ermöglicht.

Bemerkung: Hier (und auch im Schulunterricht) ist die Schreibweise $e^{\alpha i}$ nur eine Abkürzung für $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ bzw. $\cos(\alpha)+\sin(\alpha)i$. Man kann zeigen, dass $e^{\alpha i}$ der Grenzwert der komplexen Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} i = \cos(\alpha)+\sin(\alpha)i$$

ist, siehe zum Beispiel Forster (1996), S. 88.

4.3. Geometrische Interpretation der Multiplikation

Die komplexen Zahlen am Einheitskreis haben die Polarkoordinaten $(1,\alpha)$ und damit die Exponentialform $e^{\alpha i}$, wobei $\alpha \in [0, 2\pi[$ ist.

Aus den trigometrischen Additionssätzen (siehe zum Beispiel Forster (1996), S. 87) folgt, dass das Produkt zweier komplexer Zahlen am Einheitskreis wieder auf dem Einheitskreis liegt und der Addition der zwei Winkel entspricht:

$$e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} = (\cos(\alpha)+\sin(\alpha)i) \cdot (\cos(\beta)+\sin(\beta)i) =$$

$$= (\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)) + (\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta))i =$$

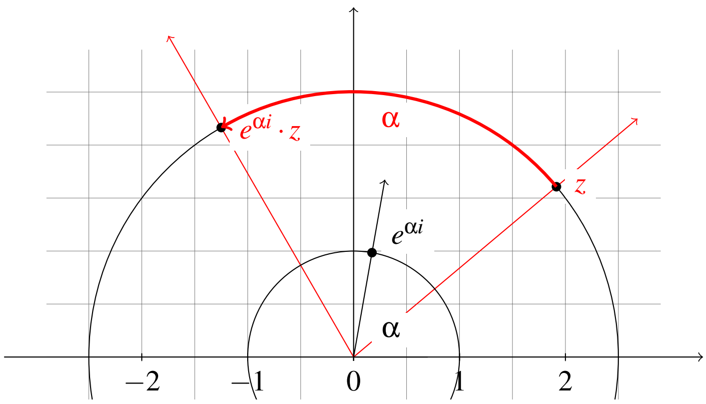
$$= \cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)i = e^{(\alpha+\beta)i}.$$

Bemerkung: Man könnte auch umgekehrt (wie in Forster (1996)) zuerst $e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} = e^{(\alpha+\beta)i}$ beweisen und daraus die trigonometrischen Additionssätze ableiten. So sind diese auch einfacher zu merken.

Multipliziert man eine komplexe Zahl $e^{\alpha i}$ auf dem Einheitskreis mit einer beliebigen komplexen Zahl $se^{\beta i}$, erhält man

$$e^{\alpha i} \cdot se^{\beta i} = se^{(\alpha+\beta)i}.$$

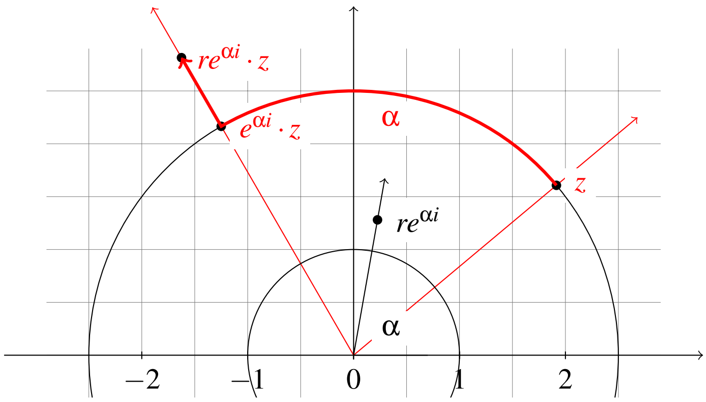
Eine komplexe Zahl z mit der komplexen Zahl $e^{\alpha i}$ zu multiplizieren bedeutet also, z um den Nullpunkt um den Winkel α zu drehen.



Seien nun $w := re^{\alpha i}$ und $z := se^{\beta i}$ zwei beliebige komplexe Zahlen. Dann ist

$$w \cdot z = (r \cdot s)e^{(\alpha+\beta)i}.$$

Multipliziert man eine komplexe Zahl z mit der komplexen Zahl $re^{\alpha i}$, so wird z um den Winkel α gedreht und dann mit r multipliziert. Man sagt, daß man eine *Drehstreckung*, das ist die Hintereinanderausführung einer Drehung und einer Streckung, ausgeführt hat.

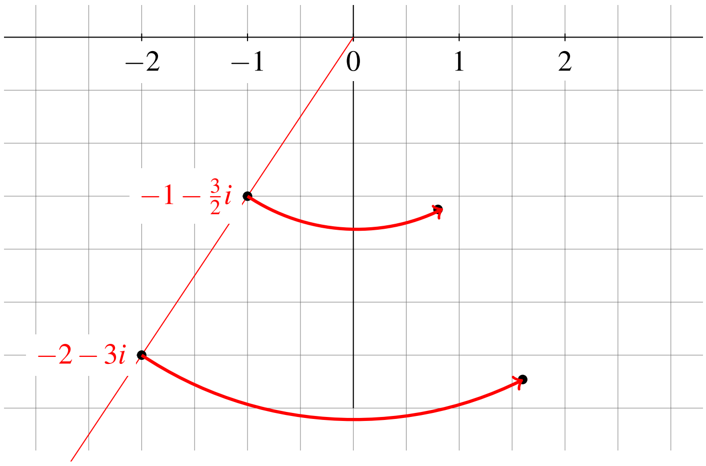


Beispiel: Wir drehen $(-2,-3) = -2-3i$ und $(-1,-\frac{3}{2}) = -1-\frac{3}{2}i$ um $\frac{\pi}{3}$ (oder 60°), indem wir $-2-3i$ und $-1-\frac{3}{2}i$ mit $e^{\frac{\pi}{3}i}$ multiplizieren:

$$e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot(-2-3i) = (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\cdot(-2-3i) = \frac{3\sqrt{3}-2}{2} - \frac{3+2\sqrt{3}}{2}i$$

und

$$e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot(-1-\frac{3}{2}i) = (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\cdot(-1-\frac{3}{2}i) = \frac{3\sqrt{3}-2}{4} - \frac{3+2\sqrt{3}}{4}i.$$



4.4. Exkurs: Noch eine Interpretation der Multiplikation

Für $\alpha,\beta\in[0,2\pi[$ definieren wir

$$\alpha +_{2\pi} \beta := \begin{cases} \alpha+\beta & \alpha+\beta < 2\pi \\ \alpha+\beta-2\pi & \alpha+\beta > 2\pi \end{cases}.$$

Diese Rechenoperation auf $[0,2\pi[$ und die Multiplikation auf $\mathbb{R}_{>0}$ verwenden wir, um durch

$$(r,\alpha)\cdot(s,\beta) := (r\cdot s, \alpha +_{2\pi} \beta)$$

eine (komponentenweise) Rechenoperation auf $\mathbb{R}_{>0}\times[0,2\pi[$ zu definieren.

Diese Rechenoperation wird durch die bijektive Funktion

$$\mathbb{R}_{>0}\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{0\}, (r,\alpha)\longmapsto re^{i\alpha},$$

auf $\mathbb{C}$ übertragen und entspricht dort der Multiplikation.

5. Anwendungen der komplexen Zahlen in der Algebra

5.1. Einheitswurzeln

Nach 4.3 ist für alle natürlichen Zahlen n und alle reellen Zahlen α

$$(e^{\alpha i})^n = e^{n\alpha i}.$$

Wegen $e^{\alpha i} = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)i$ ergibt das den Satz von Moivre:

$$(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i)^n = \cos(n\alpha) + \sin(n\alpha)i.$$

Insbesondere gilt für $\alpha = \frac{2\pi}{n}$

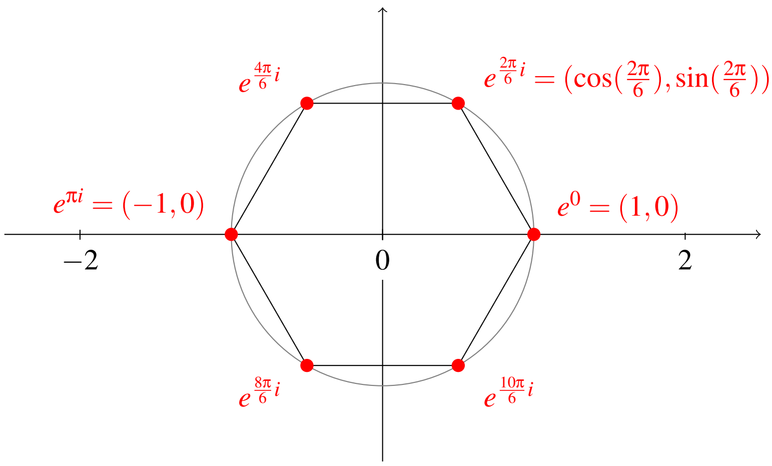
$$(e^{\frac{2\pi}{n}i})^n = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + \sin(2\pi)i = 1$$

und für alle natürlichen Zahlen k

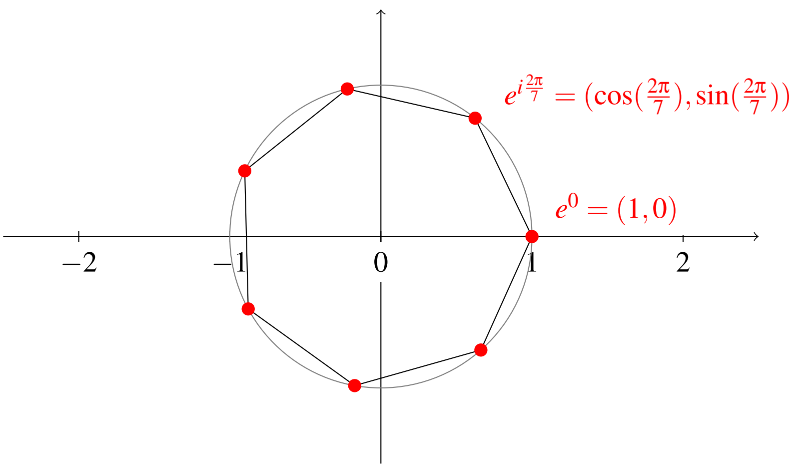
$$(e^{\frac{2k\pi}{n}i})^n = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + \sin(2k\pi)i = 1.$$

Daher sind die Zahlen $e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, $0 \le k < n$, Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$. Da sie paarweise verschieden sind und weil ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen haben kann, sind das alle Nullstellen von $X^n - 1$. Nach 4.3 ist die Menge dieser Nullstellen das regelmäßige n-Eck auf dem Einheitskreis mit 1 als einem der Eckpunkte.

Beispiel: 6-te Einheitswurzeln



Beispiel: 7-te Einheitswurzeln



5.2. Quadratische Gleichungen

Eine *quadratische Gleichung* mit komplexen Koeffizienten ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind komplexe Zahlen p und q, gesucht sind alle komplexen Zahlen z so, dass

$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$

ist. Um eine quadratische Gleichung zu lösen, schreibt man sie zuerst in Scheitelform

$$(z + \frac{p}{2})^2 - \underbrace{(\frac{p^2}{4} - q)}_{=:d} = 0$$

um. Daraus leitet man leicht ab: die gesuchten Zahlen sind $-\frac{p}{2} + w$ und $-\frac{p}{2} - w$, wobei w eine komplexe Zahl mit $w^2 = \frac{p^2}{4} - q =: d$ ist. Um w zu bestimmen, stellt man d in Polarform dar: $d = re^{\alpha i}$.

Dann ist $w = \sqrt{r}e^{\frac{\alpha}{2}i}$ oder $w = -\sqrt{r}e^{\frac{\alpha}{2}i}$.

Beispiel: Die quadratische Gleichung $z^2 + 2i \cdot z + (-1 + i) = 0$ hat die Scheitelform $(z + i)^2 - (-i) = 0$. Ihre Lösungen sind $-i + w$ und $-i - w$, wobei w eine komplexe Zahl mit $w^2 = -i$ ist. Wegen $-i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$ ist $w = \pm e^{\frac{3\pi}{4}i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$. Daher sind die Lösungen $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-2}{2}i$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}+2}{2}i$.

5.3. Polynome

Der „Fundamentalsatz der Algebra" besagt: Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle. Da der Beweis wesentliche Eigenschaften der reellen Zahlen benutzt, ist das ein Satz der (komplexen) Analysis, siehe zum Beispiel Artin (1993), S. 605.

Ist z eine komplexe Zahl, dann ergibt die Division mit Rest des Polynoms f durch das Polynom $X - z$: $f = (X - z)g + f(z)$, dabei ist das Polynom g der polynomiale Quotient und die Zahl $f(z)$ der Rest. Also ist z eine Nullstelle des Polynoms f (das heißt: $f(z) = 0$) genau dann, wenn $X - z$ ein Teiler von f ist.

Daraus folgt, dass jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten Produkt von Linearfaktoren ist:

$$f = c\prod_{i=1}^{n}(X - z_i).$$

Dabei sind $z_1, \ldots, z_n$ Nullstellen von f, n der Grad von f und $c \in \mathbb{C}$ der Leitkoeffizient von f.

Diese Darstellung von f vereinfacht viele Überlegungen über Polynome!

Zum Beispiel kann daraus der folgende Satz abgeleitet werden: Jedes Polynom f mit reellen Koeffizienten ist ein Produkt von linearen und quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten.

Im Beweis zeigen wir zuerst: Wenn z eine Nullstelle von f ist, dann auch die dazu konjugierte komplexe Zahl $\bar{z}$.
Denn: Es seien $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten von f. Aus

$$0 = \sum_{k=0}^{n} c_k z^n = f(z)$$

folgt

$$0 = \bar{0} = \overline{\sum_{k=0}^{n} c_k z^n} = \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k \bar{z}^n = \sum_{k=0}^{n} c_k \bar{z}^n = f(\bar{z}).$$

Somit ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von f.

Seien nun $z_1,\dots,z_m,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m$ die Nullstellen von f, die nicht reell sind und $z_{2m+1},\dots,z_n$ die reellen Nullstellen von f. Dann ist

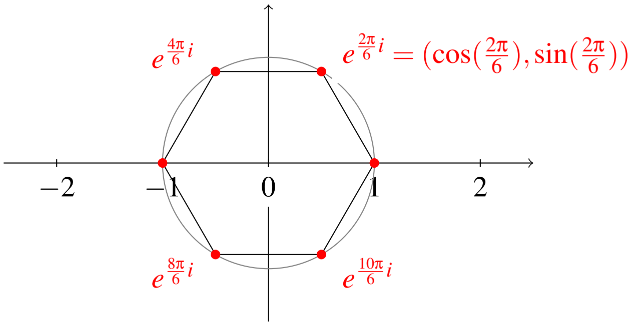
$$f = c\prod_{i=1}^{m}(X-z_i)(X-\bar{z}_i)\prod_{i=2m+1}^{n}(X-z_i).$$

Die Produkte

$$(X-z_i)(X-\bar{z}_i) = X^2-(z_i+\bar{z}_i)X+z_i\cdot\bar{z}_i = X^2-2\mathrm{Re}(z_i)X+|z_i|^2$$

sind aber Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad 2. Daraus folgt die Behauptung.

Beispiel: Wir zerlegen das Polynoms X^6-1 in reelle Polynome vom Grad 1 oder 2. Aus Abschnitt 5.1 kennen wir bereits die 6 Nullstellen von X^6-1. Zwei davon (1 und -1) sind reell.



Daher ist

$$X^6-1 = \prod_{k=0}^{5}(X-e^{\frac{2k\pi}{6}i}) =$$

$$= (X-1)(X+1)(X+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(X+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(X-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(X-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

Wegen

$$(X+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(X+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = X^2+X+1 \text{ und } (X-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(X-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = X^2-X+1$$

erhalten wir eine Zerlegung von X^6-1 in zwei lineare und zwei quadratische Faktoren:

$$X^6-1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1).$$

6. Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik (Komplexe Wechselstromrechnung)

In diesem Abschnitt schreiben wir für die komplexe Zahl $(0,1)$ nicht i, sondern wie in der Elektrotechnik üblich j. Der Grund dafür ist, dass der Buchstabe i bereits für die Stromstärke reserviert ist.

6.1. Eine grundlegende (mathematische) Idee

Wir betrachten zunächst die den Anwendungen in der Elektrotechnik zugrunde liegende Idee an Hand einer mathematischen Aufgabe:

Gegeben sind reelle Zahlen $a\geq 0, b\geq 0, \omega, \alpha$ und β.
Gesucht sind Zahlen $\gamma\in[0,2\pi[$ und $c\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass für alle reellen Zahlen t

$$a\cdot\cos(\omega t+\alpha)+b\cdot\cos(\omega t+\beta) = c\cdot\cos(\omega t+\gamma)$$

ist.

Hat diese Aufgabe immer eine Lösung?

Wir lösen diese Aufgabe durch einen „Umweg über komplexe Zahlen“ und zeigen damit auch, dass die Aufgabe eindeutig lösbar ist. Wir betrachten dazu $a \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ bzw. $b \cdot \cos(\omega t + \beta)$ als Realteil von $ae^{(\omega t+\alpha)j}$ bzw. $be^{(\omega t+\beta)j}$ und suchen zuerst Zahlen c und γ so, dass für alle reellen Zahlen t

$$ae^{(\omega t+\alpha)j} + be^{(\omega t+\beta)j} = ce^{(\omega t+\gamma)j}$$

ist. Dividiert man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch die (immer von 0 verschiedene) komplexe Zahl $e^{\omega t}$, erhält man

$$ae^{\alpha j} + be^{\beta j} = ce^{\gamma j}.$$

Das heißt, dass (c, γ) die Polarkoordinaten der komplexen Zahl $ae^{\alpha j} + be^{\beta j}$ sind. Diese sind eindeutig bestimmt und man kann sie wie in 4.2 berechnen.

Wegen

$$\begin{aligned} c \cdot \cos(\omega t + \gamma) &= \mathrm{Re}(ce^{(\omega t+\gamma)j}) = \mathrm{Re}(ae^{(\omega t+\alpha)j} + be^{(\omega t+\beta)j}) = \\ &= \mathrm{Re}(ae^{(\omega t+\alpha)j}) + \mathrm{Re}(be^{(\omega t+\beta)j}) = a \cdot \cos(\omega t + \alpha) + b \cdot \cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

ist das Zahlenpaar (γ, c) mit $\gamma \in [0, 2\pi[$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ auch die (eindeutig bestimmte) Lösung der ursprünglichen Aufgabe.

Beispiel: Die Polarkoordinaten von $4e^{3j} + 2e^{j}$ sind (gerundet) $(3.65, 2.48)$, daher ist für alle reellen Zahlen t und ω

$$4 \cdot \cos(\omega t + 3) + 2 \cdot \cos(\omega t + 1) \approx 3.65 \cdot \cos(\omega t + 2.48).$$

6.2. Wechselstromrechnung mit komplexen Zahlen (exemplarisch)

Für alle im Folgenden auftretenden Größen wählen wir vorab Einheiten (zum Beispiel Volt für die Spannung, Ampère für die Stromstärke, Sekunde für die Zeit, ...) und geben die Größen einfach durch ihre Maßzahlen bezüglich dieser Einheiten an. Mit Spannung 3 und Zeit 2 ist dann die Spannung 3 Volt und die Zeit 2 Sekunden gemeint.

Der zeitliche Verlauf eines periodischen Wechselstroms wird durch die periodischen Funktionen u (Spannung) und i (Stromstärke) beschrieben. Die Spannung zur Zeit t ist $u(t) = a \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, dabei ist a die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und α der Nullphasenwinkel.

Die reelle Zahl $u(t)$ ist der Realteil der komplexen Zahl

$$\underline{u}(t) := ae^{(\omega t+\alpha)j} = ae^{\alpha j} \cdot e^{\omega t j}.$$

Die Stromstärke zur Zeit t ist $i(t) := b \cdot \cos(\omega t + \beta)$ und ist der Realteil von

$$\underline{i}(t) := be^{(\omega t+\beta)j} = be^{\beta j} \cdot e^{\omega t j}.$$

Die Differenz $\varphi := \alpha - \beta$ heißt Phasenverschiebung (zwischen Spannung und Stromstärke).

Der Quotient

$$\underline{Z} := \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{a}{b} e^{\varphi j}$$

heißt *Impedanz*, diese ist von der Zeit unabhängig. Realteil bzw. Imaginärteil der Impedanz heißen *Wirkwiderstand* bzw. *Blindwiderstand*.

Aus der Physik ist bekannt (siehe zum Beispiel Bausch und Steffen (2007)): Die Impedanz bei einem Ohm'schen Widerstand ist eine reelle Zahl R. Die Impedanz bei einer Spule mit Induktivität L ist $\omega L j$. Die Impedanz bei einem Kondensator mit Kapazität C ist $\frac{1}{\omega C j}$.

Für die Serien- bzw. Parallelschaltung von Impedanzen gelten die gleichen Regeln wie für Ohm'sche Widerstände:

- Serienschaltung: $\underline{Z} = \sum_k \underline{Z}_k$
- Parallelschaltung: $\frac{1}{\underline{Z}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}$

Beispiel: Für die Impedanz $\underline{Z}$ einer Serienschaltung von einer Spule mit Induktivität L und einem Ohm'schen Widerstand R gilt

$$\underline{Z} = R + \omega L j.$$

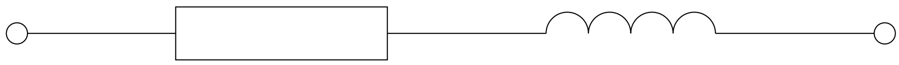
Für die Impedanz $\underline{Z}$ bei Parallelschaltung von dieser Spule und diesem Ohm'schen Widerstand gilt

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\omega L j} + \frac{1}{R}} = \frac{R\omega L j}{R + \omega L j} = R\omega L j \cdot \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot (R - \omega L j) = \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R^2 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} j.$$

Man kann nun leicht Aufgaben wie die folgende lösen:

Ein Ohm' scher Widerstand und eine Spule sind in Serie geschalten. Die Kreisfrequenz eines Wechselstroms sei ω, $R = 40$ und $\omega L = 30$. Die Spannung ist zu jeder Zeit t bekannt und sei gleich $u(t) = 230 \cdot \cos(\omega t)$.

Ermittle die Stromstärke $i(t)$ zur Zeit t !



Es ist $\underline{u}(t) = 230 \cdot e^{\omega t j}$ und $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}}$.

Wegen $\underline{Z} = R + \omega L j = 40 + 30j$ ist

$$\underline{i}(t) = \frac{230 \cdot e^{\omega t j}}{40 + 30j} = (3,68 - 2,76j) \cdot e^{\omega t j}.$$

Aus $3,68 - 2,76j \approx 4,6 \cdot e^{5,64j}$ erhalten wir für die Stromstärke i:

$$i(t) \approx \mathrm{Re}(4,6 \cdot e^{(\omega t + 5,64)j)}) = 4,6 \cdot \cos(\omega t + 5,64).$$

7. Andere Zugänge zu komplexen Zahlen

7.1. Komplexe Zahlen als 2×2-Matrizen oder Drehstreckungen

Im 2. Jahrgang der HTL wird unter anderem Matrizenrechnung unterrichtet. Daher wäre dort auch die folgende Einführung der komplexen Zahlen möglich:
Wir nehmen an, dass reelle 2×2-Matrizen und deren Addition und Multiplikation bekannt sind. Wir bezeichnen die Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit 1 und für reelle Zahlen c schreiben wir c für das c-fache der Einheitsmatrix, also

$$c = c \cdot 1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

So fassen wir die Menge aller reellen Zahlen als Teilmenge der Menge aller reellen 2×2-Matrizen auf. Es gibt Matrizen, deren Quadrat

$$-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist, zum Beispiel die Matrix

$$j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$j^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Für reelle Zahlen a und b ist dann

$$a + bj = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Man prüft leicht nach, dass die Menge $\{a + bj \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ unter Addition und Multiplikation von Matrizen abgeschlossen ist und dass die Multiplikation dieser Matrizen kommutativ ist. Kommutativ heißt, dass für solche Matrizen A, B immer $A \cdot B = B \cdot A$ ist (für beliebige Matrizen gilt das nicht).

Mit Ausnahme der Nullmatrix sind alle diese Matrizen invertierbar, denn

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher könnte man den Zahlbereich $\mathbb{C}$ auch so definieren: Die Zahlenmenge $\mathbb{C}$ ist die Menge der Matrizen $\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, die Addition und die Multiplikation ist die Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation.

Matrizen können geometrisch als lineare Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ interpretiert werden. Drehungen um den Nullpunkt $(0,0)$ in $\mathbb{R}$ entsprechen dabei den Matrizen

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

wobei α der Drehwinkel ist. Diese Drehung ordnet einem Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ den Punkt

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix}$$

zu. Die Matrix

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Drehung um den Winkel 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ und die Matrix

$$c = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

beschreibt die Streckung (mit Zentrum $(0,0)$) um den Faktor c. Die Matrix (bzw. komplexe Zahl)

$$0 \neq a + bj = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

kann als Produkt

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Das Zahlenpaar $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ liegt am Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$, daher gibt es eine Zahl $\alpha \in [0, 2\pi[$ so, dass $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ ist. Somit ist $a + bj$ das $\sqrt{a^2+b^2}$-Fache der Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha \end{pmatrix}$$

mit Drehwinkel α. Die Matrix $a + bj$ kann daher als Drehstreckung, d.h. eine Hintereinanderausführung einer Streckung um den Faktor $\sqrt{a^2+b^2}$ mit einer Drehung, aufgefasst werden.

Diese Einführung hat den Vorteil, dass man Addition und Multiplikation nicht eigens definieren muss, sondern einfach die entsprechenden Rechenoperationen von Matrizen verwenden kann.

Möchte man koordinatenfrei arbeiten, könnte man die Zahlenmenge der komplexen Zahlen auch als Menge der Drehstreckungen der Ebene mit Addition und Hintereinanderausführung (nicht Multiplikation!) von Funktionen einführen.

7.2. Komplexe Zahlen als Polynome mit Grad ≤ 1

Wir wählen als Zahlenmenge die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten, deren Grad höchstens 1 ist: $\mathbb{C} := \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Als Addition wählen wir die übliche Addition von Polynomen. Da das Produkt von zwei Polynomen vom Grad 1 den Grad 2 hat, können wir als Multiplikation nicht einfach die Multiplikation von Polynomen wählen. Wir definieren die Multiplikation wie folgt:

$$(a+bX)\cdot(c+dX) := \text{ Rest von } (a+bX)(c+dX) \text{ nach Division mit Rest durch } X^2+1,$$

dabei bedeutet $(a+bX)(c+dX)$ das Produkt der Polynome $a+bX$ und $c+dX$.

Dividiert man X^2 mit Rest durch X^2+1, erhält man

$$X^2 = 1(X^2+1) - 1,$$

somit ist

$$X \cdot X = -1.$$

Man kann nun leicht nachprüfen, dass für diese zwei Rechenoperationen alle Rechenregeln der reellen Zahlen erfüllt sind.

Man schreibt dann i oder j statt X und $a+bi$ oder $a+bj$ statt $a+bX$ und erhält

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

und

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (a\cdot c - b\cdot d) + (a\cdot d + b\cdot c)i$$

wie in 3.1 .

Schulbücher, die komplexe Zahlen als „mathematischen Ausdruck der Form $a + b \cdot i$“ (zum Beispiel in Freiler et al. (2016)) einführen, haben vermutlich diesen Zugang als Hintergrund. Dieser sollte dann aber auch erklärt werden, sonst ist nicht klar, was der Buchstabe i, das Produkt $b \cdot i$ und die Summe $a + b \cdot i$ sein sollen.

In Büchern über Algebra werden die komplexen Zahlen häufig als „Restklassenring“ $\mathbb{R}[X]/\langle X^2+1\rangle$ eingeführt. Die Elemente sind die Restklassen der Polynome modulo dem Ideal, das von X^2+1 erzeugt wird. Jede Restklasse enthält genau einen Repräsentanten vom Grad höchstens eins. Der Zugang dieses Abschnittes ergibt sich daraus, wenn man alles für diese Repräsentanten anstatt für die Restklassen formuliert.

Dieser Zugang kann auch für Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ durch algebraische Zahlen verwendet werden, zum Beispiel für die Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

Als Zahlenmenge wählt man $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a+bX \,|\, a,b \in \mathbb{Q}\}$, die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten, deren Grad höchstens 1 ist (einschließlich 0) und als Addition die übliche Addition von Polynomen.

Die Multiplikation wird durch

$$(a+bX)\cdot(c+dX) := \text{ Rest von } (a+bX)(c+dX) \text{ nach Division mit Rest durch } X^2-2,$$

definiert. Wegen $X^2 = 1(X^2-2)+2$ ist dann $X \cdot X = 2$. Mit der Schreibweise $\sqrt{2}$ statt X erhalten wir $a+b\sqrt{2} := a+bX$.

8. Résumé: Motivation für komplexe Zahlen in der Schule

Es gibt mehrere Gründe, warum der Unterricht über komplexe Zahlen in der Schule sinnvoll sein kann.

- Das Thema Komplexe Zahlen regt zum Nachdenken über den Zahlbegriff an und hilft, diesen besser zu verstehen. Es verlangt eine Reflexion über die Erweiterungen des Zahlbegriffs im Lauf der Schulzeit. Es wird deutlich, dass in früheren Schulstufen die Zahlbereichserweiterungen zu den rationalen, algebraischen und reellen Zahlen so vermittelt werden sollten, dass die „richtige Fährte“ bis hin zu den komplexen Zahlen gelegt wird.
- Komplexe Zahlen erleichtern die Beantwortung von manchen Fragen, die mit reellen Zahlen formuliert wurden. Vielleicht sollten sie daher eher „einfache Zahlen“ heißen? Dann müssten aber Fragen wie „Ist die Summe von allgemeinen Sinusfunktionen (mit gleicher Frequenz) wieder eine solche?“ oder „Welchen Grad kann ein unzerlegbares Polynom mit reellen Koeffizienten höchstens haben?“ im Unterricht auch gestellt werden.
- Komplexe Zahlen haben wichtige Anwendungen in der Physik und der Elektrotechnik. Das zeigt, dass Mathematik nützlich ist, und ergibt interessante Möglichkeiten für einen fächerübergreifenden Unterricht. Allerdings ist dafür die Polardarstellung komplexer Zahlen notwendig. Daher ist nicht nachvollziehbar, warum die Lehrplankommission für die AHS dieses Thema nur als „optional“ im Lehrplan verankert hat.

Literatur

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2022): *Lehrpläne für allgemeinbildende höhere Schulen*, Fassung vom September 2022.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2022): *Lehrpläne für berufsbildende höhere Schulen*, Fassung vom September 2022.

Artin, M. (1993): *Algebra*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Bausch, H., Steffen, H. (2007): *Elektrotechnik*. 6. Auflage. Stuttgart: Teubner.

Forster, O. (1996): *Analysis 1*. 4. Auflage. Braunschweig: Vieweg Verlag.

Freiler, Ph. et al. (2016): *Lösungswege 7*. Wien: Österreichischer Bundesverlag.

Pauer, F. (2018): A Computational Approach to Systems of Linear Equations. In: Stewart, S. et al. (Eds.): *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra.* ICME-13 Monographs. Cham: Springer.

Anschrift des Verfassers

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik
Fakultät für LehrerInnenbildung
Universität Innsbruck
Innrain 52
6020 Innsbruck
Österreich

franz.pauer@uibk.ac.at